

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Механико-математический факультет  
Кафедра газовой и волновой динамики



УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой  
/Нигматулин Р.И./  
« 10 » июня 2019 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Наименование дисциплины (модуля):**

**Основы вариационного исчисления**

---

*наименование дисциплины (модуля)*

**Уровень высшего образования:**

**Подготовка кадров в аспирантуре**

---

**Направление подготовки (специальность):**

**01.06.01 Математика и механика**

---

*(код и название направления/специальности)*

**Форма обучения:**

**очная**

---

Рабочая программа рассмотрена и одобрена  
на заседании кафедры газовой и волновой динамики  
(протокол №\_15\_, «\_10\_» \_\_июня\_ 20\_19 года)

Москва 2019

***На обратной стороне титула:***

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки специальности «Математика и механика», реализуемой по схеме программы специалитета в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение \_\_\_\_\_

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО: *относится к вариативной части ОПОП ВО.*
2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть): *отсутствуют.*
3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников (коды)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с компетенциями
УК-1	Способность формулировать научно обоснованные гипотезы, создавать теоретические модели явлений и процессов, применять методологию научного познания в профессиональной деятельности.
УК-2	Готовность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала.
УК-14	Способность использовать современные информационно-коммуникационные технологии в академической и профессиональной сферах
ОПК-1	Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, дискретной математики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики, механики сплошной среды, теории управления и оптимизации в будущей профессиональной деятельности.
ОПК-3	Способность к самостоятельной научно-исследовательской работе.
ОПК-4	Способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем.

<i>ПК-1</i>	Способность к самостоятельному анализу поставленной задачи, выбору корректного метода ее решения, построению алгоритма и его реализации, обработке и анализу полученной информации.
<i>ПК-2</i>	Способность к самостоятельному анализу физических аспектов в классических постановках математических задач и задач механики.
<i>ПК-3</i>	Способность к самостоятельной научно-исследовательской работе.
<i>ПК-4</i>	Способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем.

**4.** Формат обучения: стандартный.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 3 з.е., в том числе 36 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),  Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*	Всего	
1. Функционал одной функции одной переменной с неподвижными границами. Определение вариации функций в заданном классе. Вариация функционала. Примеры функционалов.	5	2		2	3
2. Необходимое условие стационарности функционала одной функции от одной переменной. Экстремали функционала. Уравнение Эйлера.	5	2		2	3
3. Основные случаи, приводящие к первым интегралам дифференциальных уравнений для экстремалей. Задачи определения экстремалей.	5	2		2	3
4. Функционал от нескольких функций одной переменной. Система дифференциальных уравнений Эйлера для экстремалей.	5	2		2	3

5. Методы решения задач для функционалов, зависящих от производных более высокого порядка, чем первый.	5	2		2	3
6. Функционал от функций нескольких независимых переменных. Минимизация функционала от одной функции многих переменных. Уравнение Остроградского для экстремалей таких функционалов.	5	2		2	3
7. Пример сведения решения уравнений в частных производных к задаче минимизации функционалов (Уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, уравнения колебаний).	5	2		2	3
8. Функционал при наличии дополнительных связей. Виды дополнительных связей. Понятие голономных и неголономных связей для механических систем. Условный экстремум функционала. Пример использования для механических систем со связями. Уравнение Гамильтона.	5	2		2	3
9. Текущий контроль успеваемости. Коллоквиум	5				5
10. Функционал для экстремалей, заданных параметрическим способом. Независимость решения от способа параметризации кривых.	5	2		2	3
11. Класс изопериметрических задач. Пример: задача определения замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. Двойственность изопериметрических задач.	5	2		2	3

12. Функционал с подвижными границами. Необходимые условия экстремума. Условия трансверсальности.	5	2		2	3
13. Случай движения границы по заданной кривой или поверхности. Примеры решения задач, приводящих к функционалам с подвижными границами. Функционалы от функций, разрывных на кривых или поверхностях. Сведение задач данного класса к минимизации функционала с подвижными границами.	5	2		2	3
14. Примеры задач для функционалов от функций, разрывных на кривых или поверхностях. Задача распространения света в неоднородной среде с границами раздела. Условия преломления и отражения.	5	2		2	3
15. Достаточные условия экстремума функционала. Поле экстремалей. Условие Якоби. Условие Вейерштрасса.	5	2		2	3
16. Вариационные принципы механики. Функционалы в теории упругости. Аналитическая гидродинамика. Примеры использования.	5	2		2	3
17. Приближенные методы минимизации функционалов. Прямые методы приближенного определения экстремалей функционала. Метод Эйлера. Метод Рунге. Метод Канторовича.	5	2		2	3
18. Задача устойчивости положения равновесия и задача минимизации функционала. Примеры приложений.	5	2		2	3

Промежуточная аттестация: экзамен (указывается форма проведения)	18	(количество часов,** отведенных на промежуточную аттестацию)
<b>Итого</b>	108	

*\*Внимание! В таблице должно быть зафиксировано проведение текущего контроля успеваемости, который может быть реализован, например, в рамках занятий семинарского типа.*

*\*\* , отводимые на проведение промежуточной аттестации, выделяются из часов самостоятельной работы обучающегося*

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости: собеседование со слушателями для оценки усвояемости материала и консультаций.

Вопросы к коллоквиуму

1. Минимизация (максимизация) функционала от одной функции многих переменных. Уравнение Остроградского для экстремалей таких функционалов. Пример сведения решения уравнений в частных производных к задаче минимизации функционалов (Уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, уравнения колебаний балки).

2. Исследовать на экстремум функционалы: 1.  $I[y(x)] = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \cos x) dx$ . 2.

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y) e^{2x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{e}$$

3.  $I(y) = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0.$

4. Найти условие трансверсальности для функционала вида  $V = \int_a^b (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} dx$

5. Исследовать на экстремум функционал  $V = \int_0^{x_1} \frac{1 + y'^2}{2 \sin x} dx$  с подвижным верхним пределом при условиях  $y(0) = 0, \quad y_1 = x_1 + 1.$

### Примеры задач к экзамену:

1. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$I[y(x)] = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

2. Найти условие трансверсальности для функционала с подвижным краем  $y(0) = 0, \quad y_1 = x_1 - 1, \quad V = \int_0^{x_1} \frac{1 + y'^2}{2 \sin x} dx.$

3. Показать, что функционал  $V(y(x)) = \int_0^1 (x^2 + y^2) dx$  на кривой  $y(x) = 0$  достигает строгого минимума.
4. Найти расстояние между функциями  $y = x$  и  $y = x^2 - 1$  на отрезке  $[0, 1]$  в гильбертовом пространстве  $L_2(G)$ .
5. Найти норму функции  $y = x \sin x$  на отрезке  $[0, \pi]$  в гильбертовом пространстве  $L_2(G)$ .
6. Доказать, что оператор  $Lu = \frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{du}{dx} \right]$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $u(-1) = u(1) = 0$  положительный.
7. Найти собственные числа и собственные функции оператора
8. Исследовать в пространстве функций  $y(x) \in C^1, x \in [0; p]$  на экстремум функционал  $V(y(x)) = \int_0^\pi y^2(1 - y'^2) dx$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$ .
9. Показать, что функционал  $V(y(x)) = \int_0^\pi y^2(1 - y'^2) dx$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$  на кривых  $y(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ , близких к кривой  $y(x) = 0$ , начиная с некоторого номера  $n$ , имеет отрицательное значение.
10. Имеет ли смысл задача исследования на экстремум для функционала  $V(y(x)) = \int_0^p (y^2 + 2xyy') dx$ .
11. Среди кривых, соединяющих точки А (1,3) и В (2,5), найти ту, на которой может достигаться экстремум функционала. Какой экстремум доставляет эта кривая функционалу  $V(y(x)) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx$ .
12. Решить уравнение Якоби и показать, что на экстремали вариационной задачи для функционала  $V(y(x)) = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx$ ,  $y(0) = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0$  экстремум не достигается.
13. Проверить с помощью условия Лежандра возможность включения экстремали в поле для функционала  $V(y(x)) = \int_0^2 (y'^4 + y'^2) dx$ ,  $y(0) = 1, y(2) = 5$
14. Проверить с помощью условия Лежандра возможность включения экстремали в поле для функционала  $V(y(x)) = \int_{-1}^1 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx$ ,  $y(-1) = -1, y(1) = 1$ .

15. Исследовать на экстремум функционал  $V(y(x)) = \int_0^1 (y'^3 + y') dx$ ,  $y(0) = 0, y(1) = 2$ .

16. Исследовать на экстремум функционал  $V(y(x)) = \int_0^1 (x + 2y + \frac{1}{2} y'^2) dx$ ,  $y(0) = 0, y(1) = 0$ .

17. Найти экстремали функционала:

1.  $I[y(x)] = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx$ ; 2.  $I[y(x)] = \int_a^b (16y^2 - y''^2 + x^2) dx$ ; 3.  $I(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$ ,  $y(0) = 0, y(1) = 1$

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации: собеседование со слушателями для оценки усвояемости материала и консультаций.

Вопросы к экзамену.

### Вопросы к экзамену.

**1. Функционал одной функции одной переменной с неподвижными границами.** Определение вариации функций в заданном классе. Вариация функционала. Необходимое условие стационарности функционала. Экстремали функционала. Уравнение Эйлера. Основные случаи, приводящие к первым интегралам дифференциальных уравнений для экстремалей.

**2. Функционал от нескольких функций одной переменной.** Система дифференциальных уравнений Эйлера для экстремалей. Методы решения задач для функционалов, зависящих от производных более высокого порядка, чем первый.

**3. Функционал от функций нескольких независимых переменных.** Минимизация (максимизация) функционала от одной функции многих переменных. Уравнение Остроградского для экстремалей таких функционалов. Пример сведения решения уравнений в частных производных к задаче минимизации функционалов (Уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, уравнения колебаний).

**4. Функционал при наличии дополнительных связей.** Виды дополнительных связей. Понятие голономных и неголономных связей для механических систем. Условный экстремум функционала. Пример использования для механических систем со связями. Уравнение Гамильтона.

**5. Функционал для экстремалей, заданных параметрическим способом.** Независимость решения от способа параметризации кривых. Класс изопериметрических задач. Задача определения замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. Двойственность изопериметрических задач.

**6. Функционал с подвижными границами.** Необходимые условия экстремума. Условия трансверсальности. Случай движения границы по заданной кривой или поверхности. Примеры решения задач, приводящих к функционалам с подвижными границами.

**7.Функционалы от функций, разрывных на кривых или поверхностях.** Сведение задач данного класса к минимизации функционала с подвижными границами. Примеры задач. Задача распространения света в неоднородной среде с границами раздела. Условия преломления и отражения.

**8. Достаточные условия существования экстремума функционала.** Поле экстремалей. Уравнение Якоби. Условие Якоби. Условие Вейерштрасса.

**9.Прямые методы приближенного определения экстремалей функционала.** Метод Эйлера. Метод Рица. Метод Канторовича.

**10.Вариационные методы в механике.** Теория упругости. Примеры применения (балка, колебания мембраны, задача кручения).

Аналитическая гидродинамика. Использование вариационных методов в задачах движения твёрдых тел в потоке несжимаемой жидкости.

<b>ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)</b>				
Оценка РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
<b>Знания</b> (виды оценочных средств: устные опросы)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
<b>Умения</b> (виды оценочных средств: практические контрольные задания)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
<b>Навыки (владения, опыт деятельности)</b> (виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

<i>практике, отчет по НИР)</i>				
--------------------------------	--	--	--	--

8. Ресурсное обеспечение:

1. Эльстгольц Л.Э Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: «Физ.мат.лит». 1969. - 424 с.
2. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983. - 448с.
3. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. Учебное пособие: для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ.2009. – 520 с.

9. Язык преподавания: русский

10. Преподаватель: профессор А.В. Звягин

11. Автор (авторы) программы: профессор А.В. Звягин